Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Complementos & Exercícios

Disciplina:	Cálculo III	Período:	01.2
Equipe:	Frederico de Oliveira Matias	Sala	DM 211
	João Bosco Lacerda	Sala	DM 207
	João Bosco Nogueira	Sala	DM 216
	Marivaldo P. Matos	Sala	DM 213

joão pessoa, PB
janeiro/2002

Sumário

Integral de Linha

Integral de Superfície

Bibliogra...a

[1] Apostol, T., Calculus, vol 2

[2] Ávila, G. S., Cálculo, vol 3

[3] Courant, H. & John, F., Introduction to Calculus and Analysis, vol 2

[4] Kaplan, W., Advanced Calculus

[5] Lang, S., Cálculo, vol 2

[6] Swokowski, E. W., Cálculo com Geometria Analítica, vol 2

[7] Williamson, Cronwell & Trotter, Calculus of Vector Functions

Integral de Linha. Teorema de Green no Plano.
Campos Conservativos e Funções Potenciais.
Aplicações.

A. Cálculo de Integrais de Linha

A1. Esboce o gráfico de cada curva dada abaixo, indicando a orientação positiva.

(a) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, \ t \in [0, 1] \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2, \ t \in [-1, 0] \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x = t \\ y = \ln t, \ t \in [1, e] \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \ t \in [0, 1] \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = 1/t \\ y = t, \ t \in [1, \infty] \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t, \\ z = t, \ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

A2. Parametrize as curvas A1(a), A1(c) e A1(f) do exercício precedente pelo comprimento de arco e verifique em cada caso que o veor tangente é unitário.

A3. Verifique que o caminho $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2 \operatorname{sen}(1/t)\,\vec{j}$, $0 < t \leq 1$ e $\vec{r}(0) = \vec{0}$, não é regular.

A4. Calcule o comprimento da hélice do Exercício A1(f). $\left[\text{resp. } 2\sqrt{2}\pi\right]$

A5. Seja $f(x, y)$ uma função contínua num caminho regular c de comprimento L. Se $|f(x, y)| \leq M$, em todos os pontos (x, y) da curva c, mostre que

$$\left| \int_c f(x, y)\, ds \right| \leq ML.$$

A6. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo do caminho indicado:

(a) $\int_c 2y\,dx - 3x\,dy$; $c : x = 1 - t$, $y = 5 - t$, $0 \leq t \leq 1$. [resp. $-15/2$]

(b) $\int_{(-1,1)}^{(1,1)} xy\,dx - y^2\,dy$; ao longo da parábola $y = x^2$. [resp. 0]

(c) $\int_{(3,-1)}^{(4,-2)} \frac{y}{x}\,dx - \frac{x}{y}\,dy$; ao longo da reta $y = 2 - x$. [resp. $\ln(4/9) - 2$]

(d) $\oint_{\partial D} y\,dx + 2x\,dy$; $D : x^2 + y^2 \leq 1$, $-y \leq x \leq y$, $y \geq 0$. [resp. $\pi/4$]

(e) $\int_c xy\,ds$; $c: x = t,\ y = t,\ 0 \le t \le 1$. $\left[\text{resp. } \sqrt{2}/3\right]$

(f) $\int_c x^2 ds$; $c: x = \cos 2t,\ y = \operatorname{sen} 2t,\ 0 \le t \le 2\pi$. [resp. 2π]

(g) $\oint_c y\,dx + 2x\,dy$; c é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. [resp. $1/2$]

(h) $\oint_c (x^2 - y^2)\,ds$; $c: x^2 + y^2 = 4$. [resp. 0]

(i) $\int_{(0,-1)}^{(0,1)} y^2dx + x^2dy$; ao longo do semicírculo $x = \sqrt{1 - y^2}$. [resp. $4/3$]

(j) $\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$; ao longo da curva $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. [resp. $-\pi/2$]

(k) $\oint_c (ax + by)\,dx + (\alpha x + \beta y)\,dy$; $c: x^2 + y^2 = 4$. [resp. $4\pi(\alpha - b)$]

(l) $\oint_c P(x)\,dx + Q(y)\,dy$; c é um círculo de raio r. [resp. 0]

(m) $\oint_c 2dx + (x^2 - y\,\operatorname{tg} y)\,dy$; $c: (x - 1)^2 + y^2 = 1$. [resp. 2π]

(n) $\oint_c xy\,(3y\,dx + 7x\,dy)$; $c: 9x^2 + 4y^2 = 36$. [resp. 0]

(o) $\oint_c xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy$; c consiste dos arcos $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$. [resp. $9/20$]

(p) $\oint_c \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\,dy$; c é um contorno fechado que não envolve a origem. [resp 0]

(q) $\oint_c e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$; c é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$. [resp. 0]

(r) $\int_c e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$; c é uma curva regular ligando $(0,0)$ ao ponto $(1, \frac{\pi}{2})$. [resp. e]

(s) $\int_c (x + y + z)\,dx + (x - 2y + 3z)\,dy + (2x + y - z)\,dz$; c é o caminho que liga a origem ao ponto $A(2,3,4)$, através de três segmentos retilíneos: o primeiro uma porção do eixo x, o segundo paralelo ao eixo y e o terceiro paralelo ao eixo z. [resp. 19]

A7. Calcule $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, nos seguintes casos:

(a) $\vec{F} = (x^2 + y^2)\,\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$; c é o círculo $x^2 + y^2 = 9$. [resp. $243\pi/4$]

(b) $\vec{F} = (3x^2 - 8y^2)\,\vec{i} + (4y - 6xy)\,\vec{j}$; c é a fronteira da região $D: x + y \le 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. [resp. $40/3$]

(c) $\vec{F} = xy\,\vec{i} - y\,\vec{j} + \vec{k}$; c é o segmento de reta ligando a origem ao ponto $A(1,1,1)$. [resp. $5/6$]

(d) $\vec{F} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$; c é o arco da parábola $x = t$; $y = t^2$; $z = 0$; $1 \le t \le 2$: [resp. 137/10]

(e) $\vec{F} = z^2\vec{i} + x^2\vec{k}$; c é o segmento de $(1;0;1)$ a $(2;0;1)$, seguido do segmento de $(2;0;1)$ a $(2;0;4)$: [resp. 9]

A8. Considere as funções $P(x;y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ e $Q(x;y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, definidas para $(x;y) \neq (0;0)$ e seja D o disco descrito por $x^2 + y^2 \le 1$:

(a) Mostre que $\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = 2\pi$;

(b) Mostre que $\iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$;

A9. Calcule a integral $\int_c \dfrac{xdx + ydy}{x^2+y^2}$; onde c consiste do arco da parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \le x \le 2$; seguido do segmento de reta que une os pontos $(2;3)$ a $(-1;0)$: [resp. 0]

A10. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ e θ representa o ângulo entre o campo $\vec{F}$ e $d\vec{r}$, mostre que

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\cos\theta\, ds:$$

B. O Teorema de Green no Plano

B1. No Exercício A6 identifique as integrais de linha que podem ser calculadas com auxílio do Teorema de Green. Usando este famoso teorema o cálculo tornou-se mais simples? Qual dificuldade você enfrenta ao usar o Teorema de Green?

B2. Se c é um contorno fechado, mostre que $\oint_c (\operatorname{sen} x + 4xy)\,dx + (2x^2 - \cos y)\,dy = 0$:

B3. Por que os resultados (a) e (b) do Exercício A8 não contradizem o Teorema de Green?

B4. Seja D o anel descrito por $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ e sejam $P(x;y)$ e $Q(x;y)$ funções de classe C^1 tais que $P_y = Q_x$ na região D: Quantos valores são possíveis para a integral de linha $\oint_c P\,dx + Q\,dy$, sendo c uma curva simples fechada regular por partes contida em D? [resp. 3]

C. Campos Conservativos

C1. Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^1, isto é, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, numa região contendo uma curva regular c com origem no ponto A e extremidade no ponto B. Mostre que

$$\int_c \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A).$$

C2. Se φ e ψ são duas funções potenciais de um campo vetorial F numa região D, mostre que existe uma constante C tal que $\varphi(x, y) = \psi(x, y) + C$ em qualquer ponto (x, y) da região D.

C3. Considere o campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$.

(a) Verifique que $\vec{F}$ não é conservativo;

(b) Qual o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}$ para mover uma partícula do ponto $A(1, 0, 1)$ ao ponto $B(-1, 0, e^{\pi})$ ao longo da curva $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + e^t\vec{k}$? [resp. $\frac{2e^{2\pi} - 5e^{\pi} - 5\pi - 3}{10}$]

C4. Um campo radial de forças no plano é descrito por $\vec{F}(x, y) = f(r)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $r = \|\vec{r}\|$. Admitindo f de classe C^1, verifique que um tal campo é conservativo e calcule a integral de linha $\oint_c f(r)\vec{r} \cdot d\vec{r}$, sendo c o semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. [resp. 0]

C5. Encontre uma função potencial para o campo $\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ por $\vec{F}(\vec{r}) = r^p\vec{r}$. [resp. $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{p+2} r^{p+2}$, se $p \neq -2$ e $\varphi(\vec{r}) = \ln r + C$, se $p = -2$]

C6. Mostre que as funções $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ satisfazem a relação $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$, mas o campo $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ não é conservativo.

C7. Verifique se o campo (respectivamente a forma) é conservativo (respectivamente exata) e determine uma função potencial em caso afirmativo.

(a) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. [resp. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$]

(b) $\vec{F}(x, y) = 3x^2y\vec{i} + x^3\vec{j}$. [resp. $\varphi(x, y) = x^3y + C$]

(c) $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$. [resp. $\varphi(x, y) = x^2e^x + xy - y^2 + C$]

(d) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. [resp. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C$]

(e) $\vec{F}(x;y) = (y^2 - 3x)\,\vec{i} + (2xy + \cos y)\,\vec{j}.$ $\left[\text{resp. } \varphi(x;y) = xy^2 - \frac{3}{2}x^2 + \operatorname{sen} y + C\right].$

(f) $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x)\,dx + (\cos x + x\cos y + y)\,dy.$

$\left[\text{resp. } \varphi(x;y) = x \operatorname{sen} y + y\cos x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C\right]$

(g) $[\operatorname{sen}(yx) + xy\cos(xy)]\,dx + [x^2\cos(xy)]\,dy.$ [resp. $\varphi(x;y) = x \operatorname{sen} xy + C$]

(h) $(x + z)\,dx - (y + z)\,dy + (x - y)\,dz.$ [resp. $\varphi(x;y;z) = (x - y)z + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$]

(i) $2xy^3dx + x^2y^3dy + 3x^2yz^2dz.$ [resp. não conservativo]

(j) $3y^4z^2dx + 4x^3y^2dy - 3x^2y^2dz.$ [resp. não conservativo]

(k) $(2x^2 + 8xy^2)\,dx + (3x^3y - 3xy)\,dy - (4y^2z^2 + 2x^3z)\,dz.$ [resp. não conservativo]

(l) $(y^2\cos x + z^3)\,dx - (4 - 2y \operatorname{sen} x)\,dy + (3xz^2 + 2)\,dz.$

[resp. $\varphi(x;y;z) = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z + C$]

(m) $(4xy - 3x^2z^2 + 1)\,dx + (2x^2 + 2)\,dy - (2x^3z + 3z^2)\,dz.$

[resp. $\varphi(x;y;z) = x + 2x^2y - x^3z^2 + 2y - z^3 + C$]

(n) $(e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\,dx + (2xz + 2y)\,dy + (e^x\cos z + 2xy + 3z^2)\,dz.$

[resp. $\varphi(x;y;z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3 + C$]

C8. Em cada caso abaixo calcule a integral de linha indicada, observando que a mesma independe do caminho.

(a) $\displaystyle\int_{(0;-1)}^{(1;2)} (2y - x)\,dx + (2x + y^2)\,dy.$ [resp. $13/2$]

(b) $\displaystyle\int_{(-2;0)}^{(4;\pi/4)} \operatorname{tg} y\,dx + x\sec^2 y\,dy.$ [resp. 4]

(c) $\displaystyle\int_{(0;2)}^{(1;0)} \frac{2y\,dx + 2x\,dy}{(xy + 1)^2}.$ [resp. 0]

(d) $\displaystyle\int_{(0;0;0)}^{(1;1;1)} (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz.$ [resp. 3]

(e) $\displaystyle\int_{(2;0;1)}^{(0;\pi;3)} (e^x \operatorname{sen} y + yz)\,dx + (e^x\cos y + z \operatorname{sen} y + xz)\,dy + (xy - \cos y)\,dz.$ [resp. 4]

C9. Seja $f(t)$ uma função de classe C^1 no intervalo $a \le t \le b$. Verifique que se o campo vetorial $\vec{F}(x;y) = y f(xy)\,\vec{i} + x f(xy)\,\vec{j}$ é conservativo em alguma região D do plano xy.

D. Aplicações

D1. Usando a fórmula $A(D) = \int_{\partial D} x\,dy$, calcule a área das seguintes regiões:

(a) D é a região limitada pelo eixo y, pelas retas $y = 1$ e $y = 3$ e pela parábola $y^2 = x$. [resp. $26/3$]

(b) D é a região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. [resp. πab]

Nos exercícios A14 a A19, D representa uma região do plano xy cuja fronteira ∂D é um contorno simples fechado e regular por partes e cuja área estamos denotando por $A(D)$.

D2. Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^2, isto é, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, numa região D. Se $\Delta f = 0$ em D, mostre que

$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

D3. Nas condições do exercício precedente e considerando v de classe C^1, mostre que

$$\int_{\partial D} (f_x dy - f_y dx)\, v = \iint_D (v_x f_x + v_y f_y)\, dxdy.$$

D4. Se x_0 e y_0 representam as coordenadas do centróide da região D, com densidade de massa $\rho \equiv 1$, mostre que

$$2x_0 A(D) = \oint_{\partial D} x^2 dy \quad \text{e} \quad y_0 A(D) = \oint_{\partial D} xydy.$$

D5. Demonstre a seguinte relação para uma função u de classe C^2:

$$\iint_D \Delta u\, dxdy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

D6. Se $\Delta u = 0$ na região D, mostre que $\iint_D |\nabla u|^2 dxdy = \oint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$

D7. Admitindo as operações possíveis, mostre a seguinte relação

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} f \eta_1 ds.$$

D8. Um fio tem o formato do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Determine sua massa e o momento de inércia em torno de um diâmetro, se a densidade num ponto $(x; y)$ do fio é $\rho(x; y) = |x| + |y|$. [resp. $m = 8a^2$, $I_L = 4a^4$]

D9. Encontre a massa de um fio cujo formato é aquele da curva interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 0$, se a densidade num ponto $(x; y; z)$ do fio é $\rho(x; y; z) = x^2$. [resp. $2\pi/3$]

D10. Qual o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F} = (2x + 3y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, para levar uma partícula da origem até o ponto $A(1; 1)$, ao longo do círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$? [resp. $(22 - 3\pi)/6$]

D11. A força gravitacional $\mathbf{F}$ atuando em uma partícula de massa m, próxima da superfície da terra, é dada por $\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{k}$. Mostre que o trabalho W realizado pela força $\mathbf{F}$ sobre a partícula, se esta se move num plano vertical, de uma altura H a uma altura h é $W = mg(H - h)$.

D12. Seja c uma curva simples fechada e seja $\vec{\nu} = \nu_1\,\mathbf{i} + \nu_2\,\mathbf{j}$ o campo de vetores normais exteriores à curva c. Mostre que

$$\oint_c \nu_1(x; y)\,ds = \oint_c \nu_2(x; y)\,ds = 0$$

D13. Calcule a massa m e o momento de inércia I_z de uma mola espiral de equação $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$; $0 \le t \le 2\pi$; se a densidade num ponto $(x; y; z)$ da mola é $\rho(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$. [resp. $m = \sqrt{2}\,(2\pi + 8\pi^3/3)$; $I_z = m$]

D14. Supondo que α e β são constantes, u e v são campos escalares e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais, demonstre as seguintes relações do cálculo diferencial:

(a) $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha\nabla u + \beta\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$

(c) $\nabla(u/v) = (1/v^2)[v\nabla u - u\nabla v]$ (d) $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{F} + \beta\mathbf{G}) = \alpha\operatorname{div}\mathbf{F} + \beta\operatorname{div}\mathbf{G}$

(e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = 0$ (f) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{G})$

(g) $\operatorname{rot}(u\mathbf{F}) = u\operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \nabla u \times \mathbf{F}$ (h) $\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{F} + \beta\mathbf{G}) = \alpha\operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \beta\operatorname{rot}(\mathbf{G})$

(i) $\operatorname{div}(v\nabla u) = v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v$ (j) $\operatorname{div}(u\mathbf{F}) = \nabla u \cdot \mathbf{F} + u\operatorname{div}(\mathbf{F})$.

Usando (e) conclua que não existe um campo vetorial $\mathbf{F}$ cujo rotacional seja $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

D15. Para o campo $\vec{F}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$, mostre que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ e $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dê exemplo de um campo vetorial $\vec{F}$ para o qual $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ e $\operatorname{div}(\vec{F}) = 5$. [resp. $\vec{F} = 5x\,\vec{i}$]

D16. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $r = \|\vec{r}\|$. Dada uma função real derivável $f(t)$, mostre que $\nabla f(r) = f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$ e $\operatorname{rot}(f(r)\vec{r}) = \vec{0}$. Encontre os inteiros k para os quais se tem $\operatorname{div}(r^k\vec{r}) = 0$. [resp. $k = -3$]

D17. Usando o Exercício A28 calcule $\nabla(r)$, $\nabla(1/r)$ e $\nabla(\ln r)$ [resp. $\dfrac{\vec{r}}{r}$; $-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$; $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$]

D18. Um fio uniforme de massa m tem o formato de um semicírculo de raio a.

(a) Mostre que o centróide jaz no eixo de simetria a uma distância $2a/\pi$ do centro;

(b) Mostre que o momento de inércia em torno do diâmetro é $ma^2/2$.

D19. Verifique o Teorema da Divergência no plano para os seguintes dados:

(a) $\vec{F}(x,y) = 3y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j}$; D é a região delimitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

(b) $\vec{F}(x,y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$; D é a região delimitada por $4x^2 + 25y^2 = 100$.

D20. Calcule o potencial eletrostático $\varphi(x,y,z)$ no ponto $A(0,0,z)$ devido a uma distribuição uniforme de carga elétrica, com densidade σ, no disco $x^2 + y^2 \le a^2$. Qual o campo elétrico $\vec{E}$ no ponto A? $\left[\text{resp. } \varphi = 2\pi\sigma\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right);\ \vec{E} = -\nabla\varphi = 2\pi\sigma z\left(\dfrac{1}{|z|} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{k}\right]$

D21. No exercício precedente qual seria o potencial eletrostático e o campo elétrico no ponto A, se a densidade no ponto (x,y) do disco fosse $\sigma(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$? Usando os resultados

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln\left|r + \sqrt{r^2+z^2}\right| \quad \text{e} \quad \int \sqrt{r^2+z^2}\,dr = \frac{r}{2}\sqrt{r^2+z^2} + \frac{z^2}{2}\ln\left|r + \sqrt{r^2+z^2}\right|,$$

encontra-se

$$\varphi = \pi z^2\left[\frac{a}{z}\sqrt{1+(a/z)^2} - \ln\left(\frac{a}{z} + \sqrt{1+(a/z)^2}\right)\right] \quad \text{e}$$

$$\vec{E} = 2\pi z\left[\ln\left(\frac{a}{z} + \sqrt{1+(a/z)^2}\right) - \frac{a}{z}\sqrt{1+(a/z)^2}\right]\vec{k}.$$

Integrais de Superfícies.

Teoremas de Gauss e Stokes.

Aplicações

E. Cálculo de Integrais de Superfícies

E1. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\iint_S x\,dS$; $S : x^2 + y^2 = R^2$; $-1 \le z \le 1$: [resp. 0]

(b) $\iint_S z\sqrt{x^2 + y^2}\,dS$; S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$: $\left[\text{resp. } 2\pi(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})\right]$

(c) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $x \ge 0$ e $\vec{F} = y\vec{j} + z\vec{k}$: [resp. $4\pi R^3/3$]

(d) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS$; $S : x^2 + y^2 = R^2$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $0 \le z \le a$ e $\vec{F} = \operatorname{sen} z\,\vec{i} + xy\,\vec{j} - \cos z\,\vec{k}$: [resp. $(1 - \cos a)R + aR^3/3$]

(e) $\iint_S xy\,dS$; $S : x^2 + y^2 = 2z$; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$: $\left[\text{resp. } (9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)/15\right]$

(f) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$: [resp. $4\pi R^4$]

(g) $\iint_S z^2\,dS$; S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$: [resp. 60π]

(h) $\iint_S x\,dS$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante. $\left[\text{resp. } \sqrt{3}/6\right]$

(i) $\iint_S x\,dS$; S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$: [resp. π]

(j) $\iint_S x^2\,dS$; S é a porção do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$: $\left[\text{resp. } \pi\sqrt{2}/3\right]$

(k) $\iint_S x^2\,dS$; $S : x^2 + y^2 = z^2$; $1 \le z \le 2$: $\left[\text{resp. } 15\pi\sqrt{2}/4\right]$

(l) $\iint_S (x + y)\,dS$; S é a porção do plano $2x + 3y + z = 6$ situada no primeiro octante. [resp. $\dfrac{112\sqrt{14}}{27}$]

(m) $\iint_S \dfrac{xz}{y}\,dS$; S é a porção do cilindro $x = y^2$, situada no primeiro octante, entre os planos $z = 0$; $z = 5$; $y = 1$ e $y = 4$: [resp.]

F. Teoremas de Gauss e Stokes

F1. Usando o Teorema de Stokes calcule $\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo c o bordo da superfície S :

(a) $\vec{F} = y^2\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + x^2\vec{k}$, S é a porção do plano $x + y + z = 1$, situada no primeiro octante. [resp. -1]

(b) $\vec{F} = 3y\vec{\imath} - xz\vec{\jmath} + yz^2\vec{k}$, S é a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$, situada abaixo do plano $z = 2$. [resp. 20π]

(c) $\vec{F} = 2y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. 2π]

(d) $\vec{F} = z\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + y\vec{k}$, S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. [resp. π]

(e) $\vec{F} = x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$, S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, situada abaixo do plano $z = 1$. [resp. 0]

F2. Com auxílio do Teorema de Stokes calcule $\int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz$:

(a) $\int_c y\,dx + z\,dy + x\,dz$, $c : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$. $\left[\text{resp. } \pi R^2\sqrt{3}\right]$

(b) $\int_c (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$, $c : x^2 + y^2 = 2y$, $y = z$. [resp. 0]

(c) $\int_c (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, c é a curva interseção da fronteira do cubo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$, com plano $x + y + z = 3a/2$. [resp. $9a^3/2$]

(d) $\int_c yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, c é qualquer caminho regular ligando os pontos $A(1, 1, 2)$ e $B(3, 5, 0)$. [resp. 0]

(e) $\int_c \operatorname{sen}(yz)\,dx + xz\cos(yz)\,dy + xy\cos(yz)\,dz$, c é a parte da hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$ do ponto $A(1, 0, 0)$ ao ponto $B(1, 0, 2\pi)$. [resp. 0]

F3. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S e, quando possível, use o Teorema da Divergência de Gauss para comprovar o resultado:

(a) $\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, S é a superfície do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 0$. [resp.]

(b) $\vec{F} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp.]

(c) $\vec{F} = x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$, S é a parte do primeiro octante, limitada pelos três planos coordenados e pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp.]

(d) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; S é a superfície do primeiro octante, que constitui a fronteira do sólido limitado pelos três palnos coordenados e pelos planos $x = 1$; $y = 2$; e $3x + 2y + z = 12$. [resp.]

F4. Usando o Teorema de Stokes calcule $\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, interceptada pelo plano $z = 0$, e $\vec{F} = 2y\vec{i} + e^z\vec{j} - \operatorname{arctg} x\,\vec{k}$. [resp. -4π]

F5. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor posição do ponto $P(x; y; z)$ e seja $r = \|\vec{r}\|$. Verifique que o fluxo do campo $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ através de uma superfície simples fechada regular S que não contenha a origem é igual a zero. Qual seria o fluxo do campo $\vec{F}$, se a superfície S contivesse a origem no seu interior? [resp. 4π]

F6. Com a notação do exercício precedente e admitindo que Ω representa uma região compacta do $\mathbb{R}^3$ delimitada por uma superfície simples fechada e regular S (por exemplo uma esfera), use o Teorema da Divergência de Gauss e verifique que a relação

$$\iint_S r\,\vec{r} \cdot \vec{n}\, dS = 4 \iiint_\Omega r\, dV.$$

F7. Usando o Teorema de Gauss estabeleça as seguintes identidades:

(a) $\iiint_\Omega (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dV = \iint_{\partial\Omega} v\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dS$.

(b) $\iiint_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \iint_{\partial\Omega} \left(v\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right) dS$.

(c) $\operatorname{vol}(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} \|\vec{r}\| \cos(\vec{r}, \vec{n})\, dS$.

F8. Se $\cos\alpha, \cos\beta$ e $\cos\gamma$ representam os co-senos diretores da normal exterior à superfície S, use o Teorema de Gauss e calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\iint_S (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + xz\cos\gamma)\, dS$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. 0]

(b) $\iint_S x^2y^2z^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, dS$; S é a fronteira do cubo $0 \le x \le a$; $0 \le y \le a$; $0 \le z \le a$. [resp. $a^8/3$]

G. Aplicações

G1. Em cada caso abaixo calcule a área da superfície S:

(a) S é uma esfera de raio R. [resp. $4\pi R^2$]

(b) S é a porção do plano $x + y + z = a$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. $\left[\text{resp. } \pi a^2\sqrt{3}\right]$

(c) S é a porção do parabolóide $x^2 + y^2 + z = a^2$, delimitada pelo cilindro vazado $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. $\left[\text{resp. } \left(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}\right)\pi/24\right]$

(d) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$. [resp. $(2\pi - 4)\,a^2$]

(e) S é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, delimitada por $y^2 = a(x + a)$. $\left[\text{resp. } 8a^2\sqrt{2}\right]$

(f) S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$. $\left[\text{resp. } \pi a^2\sqrt{2}\right]$

(g) S é a porção do parabolóide $x^2 + z^2 = 2ay$, $a > 0$, abaixo do plano $y = a$.
[resp. $(3\sqrt{3} - 1)2\pi a^2/3$]

(h) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$, compreendida acima da região triangular $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$. $\left[\text{resp. } \sqrt{3/4} - 1 + \pi/12\right]$

(i) S é a porção do plano $3x + 2y + z = 7$, que é cortada pelos três planos coordenados.
[resp. $49\sqrt{14}/12$]

(j) S é a porção do cilindro parabólico $z^2 = 8x$, compreendida acima da região $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. [resp. $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$]

(k) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$, interna ao cilindro parabólico $x^2 = 2y + 4$ e acima do plano $z = 0$. $\left[\text{resp. } 16\sqrt{2}\right]$

G2. Seja S a superfície de um paralelogramo do $\mathbb{R}^3$ e sejam S_1, S_2 e S_3 suas projeções nos planos coordenados. Verifique que $A(S) = \sqrt{A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2}$

G3. Deduza as fórmulas para as áreas de um cone e de um cilindro de raio a e altura h. $\left[\text{resp. } \pi a\sqrt{a^2 + h^2} \text{ e } 2\pi ah\right]$

G4. Uma curva regular c no plano xz de equação cartesiana $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gira em torno do eixo z descrevendo uma superfície S. Mostre que $A(S) = 2\pi Lh$, onde L é o comprimento da curva c e h é a distância do centróide de c ao eixo de rotação.

G5. Em coordenadas cilíndricas uma superfície S é descrita pela equação $z = G(r, \theta)$,

$(r,\theta) \in D$. Mostre que

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + G_r^2 + \frac{1}{r^2} G_\theta^2}\; r\,dr\,d\theta.$$

G6. Mostre que, em coordenadas cilíndricas, a equação $z = G(r)$, $a \le r \le b$, $0 \le \theta \le 2\pi$, representa uma superfície de revolução cuja área é

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + G_r^2}\; r\,dr.$$

G7. Calcule a área do cone obtido por rotação da reta $y = 3x + 2$, $0 \le x \le 3$, $z = 0$, em torno do eixo x. $\left[\text{resp. } 39\pi\sqrt{10}\right]$

G8. Calcule o momento de inércia da superfície homogênea S em torno do eixo indicado. Em cada caso admita que a densidade superficial de massa é $\sigma \equiv 1$.

(a) S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, compreendida entre as folhas do cone $x^2 + y^2 = z^2$; Eixo x. [resp. $1024/45$]

(b) S é a superfície total do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$, tendo vértices $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ e $D(0,0,0)$; Eixo y. $\left[\text{resp. } (2 + \sqrt{3})/6\right]$

(c) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo z. [resp. $8\pi R^4/3$]

(d) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo é a reta $x = y$, $z = 0$. [resp. $8\pi R^4/3$]

G9. Encontre o centróide de cada superfície S dada abaixo. Como no exercício precedente, admita que a densidade superficial de massa é $\sigma \equiv 1$.

(a) S é o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. [resp. $C(0,0,R/2)$]

(b) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que jaz no interior do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$. [resp. $C(0,0,\frac{2+\sqrt{2}}{4})$]

(c) S é a porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$, interna ao cilindro $x^2+y^2 = 2$. [resp. $C(0,0,)$]

G10. Uma concha esférica homogênea de raio a é cortada pela folha de um cone circular reto cujo vértice está no centro da esfera. Se o ângulo do vértice do cone é α, $0 < \alpha < \pi$, determine o centro de massa da porção da concha que jaz no interior do cone. [resp. sobre o eixo do cone a uma distância $\delta = \dfrac{a(1 - \cos\alpha)}{4[1 - \cos(\alpha/2)]}$ do centro da esfera]

G11. Calcule o campo eletrostático na origem devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o cilindro $x^2 + y^2 = R^2, \; 0 \le z \le a$. [resp. $\vec{E} = 2\pi\rho \dfrac{\sqrt{R^2 + a^2} - R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \vec{k}$]

G12. Calcule o potencial eletrostático no ponto $(0, 0, z)$, devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. [resp. $\varphi(0, 0, z) = \dfrac{2\pi\rho R}{z}(\sqrt{R^2 + z^2} - R + z)$]

G13. Considere uma distribuição uniforme de carga elétrica sobre uma esfera S de raio a. Mostre que o campo elétrico num ponto do eixo z interior a S é zero. Qual o campo elétrico nos pontos do eixo z exteriores à esfera S ? [resp. $\vec{E}(0, 0, z) = \dfrac{4\pi a^2\rho}{z^2}\vec{k}$. Observe que nestes pontos o fenômeno ocorre como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera]

G14. Mostre que $\iint_S (x^2 + y^2)(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{n}\, dS = 4I_z$, onde I_z representa o momento de inércia, com relação ao eixo z, do sólido com densidade de massa $\rho \equiv 1$, delimitado por S.

G15. Dada uma superfície S de equação cartesiana $\varphi(x, y, z) = 0$, $(y, z) \in D$, φ de classe C^1, com $\varphi_x \neq 0$, mostre que:

(a) $\displaystyle\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}\, \frac{f}{|\varphi_x|} dydz$;

(b) $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (\vec{F} \cdot \nabla\varphi) \frac{1}{|\varphi_x|} dydz$.

G16. Uma edificação é erguida no formato da figura abaixo, onde a fachada é descrita pela superfície $xy = 1$. Calcule o volume e a área total da edificação.