Álgebra Linear—Exercícios Resolvidos

Agosto de 2001

Sumário

Capítulo 1

Exercícios Resolvidos — Uma Revisão

Ex. Resolvido 1 *Verifique se* $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; y = x, z = w^2\}$ *com as operações usuais de* $\mathbb{R}^4$ *é um espaço vetorial.*

Resolução: Note que $(0, 0, 1, 1) \in V$ mas $-1(0, 0, 1, 1) = (0, 0, -1, -1) \notin V$. Assim, V não é um espaço vetorial.

$\square$

Ex. Resolvido 2 *Seja* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *uma matriz quadrada de ordem* n. *Verifique se* $W = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}); AX = 0\}$ *é um subespaço vetorial de* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, *com as operações usuais.*

Resolução:

1. Seja $O = (0)$ a matriz $n \times 1$ nula. Como $AO = O$, temos que $O \in W$.
2. Se $X, Y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então, pelas propriedades da soma e da multiplicação por escalar usuais entre as matrizes e, também, pelas propriedades do produto entre matrizes, temos

$$A(X + \lambda Y) = AX + A(\lambda Y) = AX + \lambda AY = O + \lambda O = O.$$

   Portanto $X + \lambda Y \in W$.

Concluímos que W é um subespaço vetorial de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

$\square$

Ex. Resolvido 3 *Encontre o subespaço vetorial de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *gerado por* $S = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$.

Resolução: Note que $t^3 = (t^3 + 1) - 1$. Assim, dado $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ podemos escrever $p(t) = (a_0 - a_3) + a_1 t + a_2 t^2 + a_3(t^3 + 1) \in [S]$. Logo, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = [S]$.

$\square$

Ex. Resolvido 4 *Encontre o subespaço vetorial de* $M_2(\mathbb{R})$ *gerado por*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução: Temos que $A \in [S]$ se e somente se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $A \in [S]$ se e somente se os elementos da diagonal principal de A são nulos.

$\square$

Ex. Resolvido 5 *Encontre um conjunto finito de geradores para*

$$W = \{X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) : AX = 0\},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in W \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

portanto,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Ex. Resolvido 6 *Encontre um conjunto finito de geradores para*

$$W = \{X \in M_{4\times 1}(\mathbb{R}) : AX = 0\},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in W \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -\gamma/2 - \delta/2 \\ \beta = 3\gamma/2 + \delta/2 \end{cases},$$

isto é,

$$X = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - \delta/2 \\ 3\gamma/2 + \delta/2 \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

portanto,

$$W = \left[\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

□

Ex. Resolvido 7 *Encontre uma base para o subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$ *dado por* $U = [(1,0,1),(1,2,0),(0,2,-1)]$.

Resolução: *Primeiro Modo:* $(x,y,z) \in U$ se e somente se existem $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1,0,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(0,2,-1) = (x,y,z),$$

ou seja, $(x,y,z) \in U$ se e somente se o sistema abaixo admite solução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z-x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z-x+y/2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y/2 \\ y/2 \\ z-x+y/2 \end{pmatrix}$$

que possui solução, e esta é dada por $\alpha = \gamma + x - y/2$, $\beta = -\gamma + y/2$, $\gamma \in \mathbb{R}$, se e somente se $z = x - y/2$. Dessa forma,

$$(x,y,z) = (\gamma + x - y/2)(1,0,1) + (-\gamma + y/2)(1,2,0) + \gamma(0,2,-1) =$$
$$= (x,y,x-y/2) = x(1,0,1) + y(0,1,-1/2)$$

e como

$$(1,0,1),(0,1,-1/2) \tag{1.1}$$

são l.i., segue-se que formam uma base de U.
Segundo Modo: Note que os vetores $(1,0,1)$ e $(1,2,0)$ são l.i. e pertencem a U. Vejamos se estes vetores juntamente com $(0,2,-1)$ são l.d. ou l.i.:

$$\alpha(1,0,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(0,2,-1) = (0,0,0)$$

$$\iff (\alpha+\beta, 2\beta+2\gamma, \alpha-\gamma) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ \alpha-\gamma=0 \end{cases} \iff \alpha = -\beta = \gamma,$$

ou seja, os vetores

$$(1,0,1), (1,2,0), (0,2,-1)$$

são l.d.. Portanto,

$$(1,0,1), (1,2,0) \tag{1.2}$$

formam uma base de U.

Embora as bases 1.1 e 1.2 não coincidam, ambas estão corretas. Basta observar que

$$(1,2,0) = (1,0,1) + 2(0,1,-1/2).$$

$\square$

Ex. Resolvido 8 *Dados* $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ *e* $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$, *em* $M_2(\mathbb{R})$, *encontre uma base para* U, W, $U \cap W$ *e* $U + W$, *no caso em que não se reduzam a* $\{0\}$.

Resolução:

U :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff c = b,$$

portanto, $A \in U$ se e somente se existirem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mesma equação acima tomada com $A = 0$, mostra que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são l.i. e, portanto, como geram U, formam uma base de U. Note que $\dim U = 3$.

W : Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gera W e é não nula, ela serve de base para W. Note que $\dim W = 1$.

$U \cap W$:

$$A \in U \cap W \iff A = A^t \text{ e existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

isto é, se e somente se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

que é satisfeita se e somente se $\lambda = 0$, ou seja, $A = O$. Desse modo, $U \cap W = \{O\}$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

$U+W:$ Temos
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) = 4 = \dim M_2(\mathbb{R});$$
portanto, $U+W = M_2(\mathbb{R})$ e uma base pode ser dada por
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$\square$

Ex. Resolvido 9 *Sejam* $U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$ *subespaços vetoriais de* $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*. Encontre uma base para* U*,* W*,* $U \cap W$ *e* $U+W$*, no caso em que não se reduzam a* $\{0\}$*.*

$U:$
$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \iff p'(t) = a_1 + 2a_2t = 0$$
$$\iff a_1 = a_2 = 0 \iff p(t) = a_0 \iff p(t) \in [1].$$
Logo, 1 é uma base de U e $\dim U = 1$.

$W:$
$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \iff \begin{cases} p(0) = a_0 = 0 \\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$
$$\iff p(t) = a_1t - a_1t^2 = a_1(t - t^2),$$
isto é, $p(t) \in [t - t^2]$. Assim $t - t^2$ é uma base de W e $\dim W = 1$.

$U \cap W:$ $p(t) \in U \cap W = [1] \cap [t - t^2]$ se e somente se existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $p(t) = \lambda = \mu(t - t^2)$. Claramente, isto só é possível quando $\lambda = \mu = 0$, ou seja, quando $p(t) = 0$. Assim, $U \cap W = \{0\}$ e $\dim U \cap W = 0$.

$U+W:$ Temos
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) = 1 + 1 - 0 = 2$$
e como a soma é direta podemos tomar $1, t - t^2$ como base de $U \cap W$. $\square$

Ex. Resolvido 10 *Seja* V *um espaço vetorial. Sejam* B *e* C *bases de* V *formadas pelos vetores* e_1, e_2, e_3 *e* g_1, g_2, g_3*, respectivamente, relacionados da seguinte forma:*
$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases}$$

1. *Determine as matrizes de mudança da base* B *para a base* C*, isto é,* M_B^C*, e da base* C *para a base* B*, isto é,* M_C^B*.*
2. *Se as coordenadas do vetor* v *em relação a base* B*, isto é,* v_B*, são dadas por* $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ *encontre as coordenadas de* v *em relação a base* C*, isto é,* v_C*.*
3. *Se as coordenadas do vetor* v *em relação a base* C*, isto é,* v_C*, são dadas por* $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ *encontre as coordenadas de* v *em relação a base* B*, isto é,* v_B*.*

Resolução:

1. Temos
$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Como $M_C^B = \left(M_B^C\right)^{-1}$, passemos a encontrar a inversa de M_B^C :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right)$$
Portanto,
$$M_C^B = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

2. Como $v_C = M_C^B v_B$,
$$v_C = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Como $v_B = M_B^C v_C$,
$$v_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ex. Resolvido 11 *Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:*
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); x - y - z = 0 \right\}.$$

a) Mostre que B dada pelas matrizes
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e C dada pelas matrizes
$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
são bases de W.

b) Encontre as matrizes de mudança da base B para a base C e da base C para a base B.

c) Encontre uma base D de W, tal que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base D para a base B, isto é, $P = M_D^B$.

Resolução:

a)
$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W \iff x = y + z.$$

Assim, $A \in W$ se e somente se existirem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

isto é,

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

A equação 1.3 tomada com $A = O$ mostra que as matrizes acima que geram W são de fato l.i. e, portanto, formam uma base de W. Além do mais, $\dim W = 3$.

Como C é formado por três vetores de W e a dimensão de W é três, basta verificar que tais vetores são l.i.. De fato,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha + \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

b) Basta notar que

$$\begin{aligned} C_1 &= B_2 \\ C_2 &= -B_1 + B_2 \\ C_3 &= B_3 \end{aligned}$$

e daí,

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quanto a M_C^B, vemos que

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 - C_2 \\ B_2 &= C_1 \\ B_3 &= C_3 \end{aligned}$$

e assim,

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Procuremos D_1, D_2 e D_3 em W de modo que formem uma base W tal que $M_D^B = P$. Isto ocorre se e somente se

$$\begin{array}{rl} B_1 = & 1D_1 + 0D_2 + 0D_3 = D_1 \\ B_2 = & 1D_1 + 0D_2 + 3D_3 = D_1 + 3D_3 \\ B_3 = & 0D_1 + 2D_2 + 1D_3 = 2D_2 + D_3 \end{array},$$

ou seja, $D_1 = B_1$, $D_3 = (B_2 - B_1)/3$ e $D_2 = (B_3 - (B_2 - B_1)/3)/2 = (3B_3 + B_1 - B_2)/6$. Assim, a base D formada por D_1, D_2 e D_3 é dada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

Mais Exercícios Resolvidos Sobre Transformações Lineares

Ex. Resolvido 12 *Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(p) = p' + p''$.

Resolução: Note que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathcal{N}(T)$ se e somente se $(a_1 + 2a_2x) + 2a_2 = 0$, isto é, se e somente se $a_1 = a_2 = 0$. Desta forma, $p(x) \in \mathcal{N}(T)$ se e somente se $p(x) = a_0$. Desta forma o polinômio 1 é uma base de $mathcal N(T)$.

Como $1, x, x^2$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que completa a base de $\mathcal{N}(T)$, vemos que pela demonstração do teorema **??**, $T(x) = 1$ e $T(x^2) = 2x + 2$ formam uma base da imagem de T.

□

Ex. Resolvido 13 *Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(X) = AX + X$, *onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resolução: Observe que se $T(X) = (A + I)X$, onde I é a matriz identidade de ordem dois.

Se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vemos que $X \in \mathcal{N}(T)$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vê-se claramente que

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $\mathcal{N}(T)$.

A seguir, procuraremos matrizes M_3 e M_4 tais que $M_1, \ldots, M_4$ formem uma base de $M_2(\mathbb{R})$. Isto é, equivalente a encontrar M_2 e M_3 tais que a única solução de

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \delta M_4 = 0$$

seja a trivial.

Colocando

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } M_4 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que equivale à equação

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & a & x \\ 1 & 0 & c & z \\ 0 & -2 & b & y \\ 0 & 1 & d & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que apresenta uma única solução se e somente se o determinante da matriz de ordem quatro acima for diferente de zero. Como este determinante é

$$\Delta = -2(2c + a)(2t + y) + (2z + x)(2d + b),$$

vemos que $\Delta \neq 0$ se e somente se

$$(2z + x)(2d + b) \neq 2(2c + a)(2t + y).$$

Dessa forma podemos tomar

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M_4 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue da demonstração do teorema **??** que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

formam uma base da imagem de T.

□

Ex. Resolvido 14 *Determinar uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja imagem seja gerada pelos vetores* $(1, 2, 0)$ *e* $(1, 1, 1)$.

Resolução: Como $(1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$ são linearmente independentes, o subespaço gerado por estes vetores tem dimensão dois. Logo, a transformação procurada deverá ter necessariamente núcleo unidimensional. O que faremos é definir uma transformação tal que $T(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$, ou seja,

$$T(x, y, z) = x(1, 2, 0) + y(1, 1, 1) = (x + y, 2x + y, y)$$

assim definida, é linear e satisfaz a propriedade desejada.

□

Ex. Resolvido 15 *Determinar uma transformação linear* $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *cujo núcleo seja gerado pelos polinômios* $1 + x^3$ *e* $1 - x^2$.

Resolução: Como $\dim \mathcal{P}_3 = 4$ e o subespaço gerado por $1 + x^3$ e $1 - x^2$ tem dimensão dois, vemos que a imagem da transformação procurada deverá ter necessariamente dimensão dois.

O primeiro passo é completar a seqüência de vetores $1 + x^3$ e $1 - x^2$ a uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isto, basta acrescentarmos os polinômios 1 e x, como se vê:

$$\alpha 1 + \beta x + \gamma(1 + x^3) + \delta(1 - x^2) = \alpha + \gamma + \delta + \beta x - \delta x^2 + \gamma x^3 = 0$$

se e somente se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Assim, a imagem dos polinômios 1 e x, pela transformação procurada precisam necessariamente ser linearmente independentes. Para isto, o que faremos é definir $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T(1) = 1$, $T(x) = x$, $T(1 + x^3) = 0$ e $T(1 - x^2) = 0$.

Dado $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, reescrevemos $p(x) = a_0 + a_2 - a_3 + a_1x + a_3(1 + x^3) - a_2(1 - x^2)$ e colocamos

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= T(a_0 + a_2 - a_3 + a_1x + a_3(1 + x^3) - a_2(1 - x^2)) \\ &= (a_0 + a_2 - a_3)1 + a_1x = a_0 + a_2 - a_3 + a_1x, \end{aligned}$$

que é uma transformação linear cujo núcleo é gerado por $1 + x^3$ e $1 - x^2$.

□

Ex. Resolvido 16 *Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por $T(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$. Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$.*

Resolução: Temos

$$T(1) = 1, \quad T(x) = \frac{1}{2}, \quad T(x^2) = \frac{1}{3}.$$

Assim, a matriz de T com relação às bases canônicas é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 17 *Seja $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = p'(x)$. Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Resolução: Temos

$$T(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \quad T(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$
$$T(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \quad T(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2$$

e a matriz de T com relação às bases canônicas é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 18 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por*

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C, e com relação à base B formada pelos vetores

$$u = (1, 1, 2), v = (-1, 1, 0), w = (-1, -1, 1).$$

Resolução: Com relação à base canônica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, temos

$$\begin{array}{rcrcrcr} T(e_1) = T(1,0,0) = (1,0,1) = & & e_1 & + & 0e_2 & + & e_3 \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1,1) = & & 0e_1 & + & e_2 & + & e_3 \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (1,1,2) = & & e_1 & + & e_2 & + & 2e_3 \end{array}$$

e, portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Com relação à base B, temos

$$\begin{array}{rcccccc} T(u) = T(1,1,2) = (3,3,6) = 3u = & 3u & + & 0v & + & 0w \\ T(v) = T(-1,1,0) = (-1,1,0) = v = & 0u & + & v & + & 0w \\ T(w) = T(-1,-1,1) = (0,0,0) = & 0u & + & 0v & + & 0w \end{array}$$

e, portanto,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 19 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$ uma transformação idempotente (Cf.* **??***). Sabemos, pela proposição* **??***, que $U = \mathcal{N}(T) \oplus T(U)$. Seja B uma base de U formada pelos vetores $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ onde $u_1, \ldots, u_p$ formam uma base de $\mathcal{N}(T)$ e $v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de $T(U)$. Encontre $[T]_B$.*

Resolução: Como $T(u_1) = \cdots = T(u_q) = 0$, pois $u_j \in \mathcal{N}(T)$ e $T(v_j) = \alpha_{1j}v_1 + \cdots + \alpha_{qj}v_q$, já que $T(v_j) \in T(U)$, vemos que $[T]_B$ tem a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{q1} & \cdots & \alpha_{qq} \end{pmatrix}$$